5/11/19

Τυχαίες Μεταβλητές και Κατανομές

Παράδειγμα 1:

Έστω ένα ζάρι ρίχνεται μία φορά. Τότε, ο δειγματικός χώρος θα είναι ο $S = \{$⚀, ⚁, ..., ⚅$\}$. Από μαθηματικής πλευράς το S δεν είναι τίποτα γιατί είναι σύνολο με σύμβολα. Γι' αυτό το αντιστοιχίζουμε στο $S=\{1,2,\dots,6\}$. Αυτό λέγεται τρόπος μετάβασης. Η συνάρτηση μετάβασης στηρίζεται στην απλοποίηση του συμβολισμού.

Παράδειγμα 2:

Ένας φοιτητής απαντά στην τύχη σε 3 ερωτήσεις που του δίνονται σωστά (Σ) ή λάθος (Λ). Ο δειγματικός χώρος θα είναι: $S=\{ΛΛΛ, ΛΛΣ, ΛΣΛ, ΣΛΛ, ΛΣΣ, ΣΛΣ, ΣΣΛ, ΣΣΣ\}$

Πιθανά αποτελέσματα: 8 ή από πολ/κη αρχή:

$$\left.\begin{array}{ccc} 1^{η} & 2^{η} & 3^{η} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^3 = 8.$$

- Ποιος είναι ο αριθμός X των σωστών απαντήσεων;

Είναι $X=0$ ή $X=1$ ή $X=2$ ή $X=3$

Το μέγεθος που με ενδιαφέρει να μελετήσω με μεταφέρει από έναν δειγματικό χώρο σε υποσύνολο της πραγματικής ευθείας: $X=\{0,1,2,3\}$.

- Αν ο φοιτητής κερδίζει μία μονάδα για κάθε σωστή απάντηση και χάνει μία μονάδα για κάθε λάθος απάντηση, ποιο είναι το κέρδος (Y) του φοιτητή;

: Είναι $Y=\{-3,-1,1,3\}$

Το μέγεθος που με ενδιαφέρει να υπολογίσω από τον χώρο S με στέλνει στην ευθεία των πραγματικών

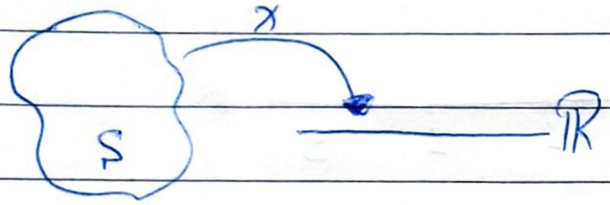
Παράδειγμα 3:

Ένα νόμισμα ρίχνεται μέχρι να εμφανιστεί πρώτη "κορώνα". Ο δειγματικός χώρος είναι: $S=\{K, ΓK, ΓΓK, \dots, \underbrace{ΓΓ\dots Γ}_{n-1 \text{ φορές}}K, \dots\}$

Ποιο είναι το πλήθος ρίψεων (Z) μέχρι να έρθει για πρώτη φορά K.

Είναι $Z = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

Πρώτη προσέγγιση του ορισμού: Τυχαία μεταβλητή (τ.μ) ονομάζεται μία συνάρτηση του αρχικού δ.χ S στο $\mathbb{R}$ ή σε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και συμβολίζεται με $x, y, z, x_1, x_2, \dots$



Ερώτημα: Μπορώ να υπολογίζω την πιθανότητα στο $\mathbb{R}$ ή σε υποσύνολά του; Έχει νόημα να ενδιαφέρομαι για πιθανότητα η τ.μ να πάρει μία συγκεκριμένη τιμή;

Παράδειγμα 3 (Συνέχεια):

Z: τιμές $1, 2, \dots, n, \dots$

Υποθέτω ότι $P(K) = p$, $0 < p < 1$, σε κάθε ρίψη οπότε $P(\Gamma) = 1 - p$. Μπορώ να υπολογίσω την πιθανότητα της f να πάρει την τιμή n;

Λύση:

$$P(Z=n) = P(\underbrace{\Gamma\Gamma\dots\Gamma}_{n-1}K) \xlongequal{\text{ανεξ}} \underbrace{P(\Gamma)\dots P(\Gamma)}_{n-1 \text{ φορές}}P(K) = (1-p)^{n-1} \cdot p$$

Άρα, $P(Z=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p \quad , n = 1, 2, \dots$

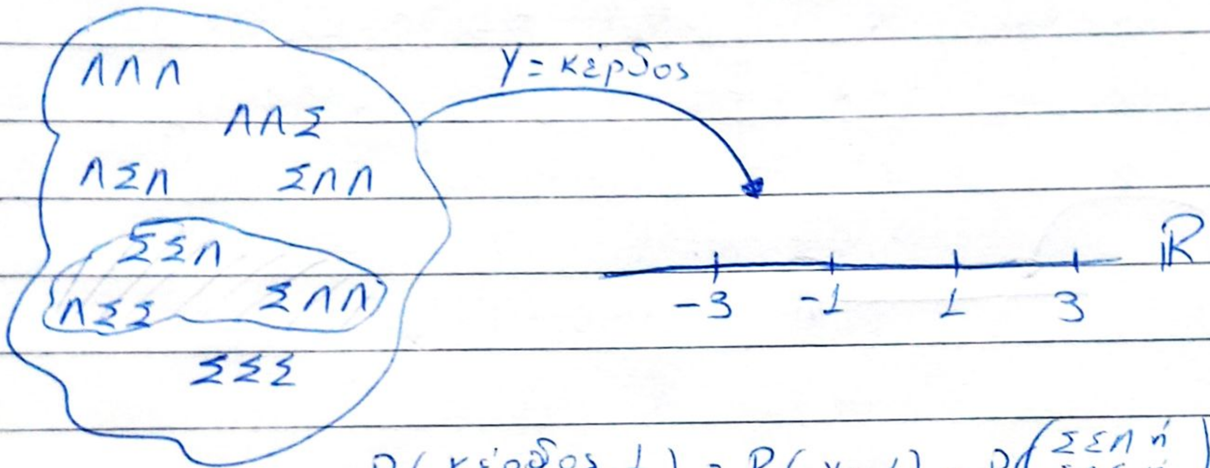
Παράδειγμα 2 (συνέχεια):

$P(Y=-3) = P(ΛΛΛ) = \frac{1}{8}$

$P(Y=-1) = P(ΛΣΛ \text{ ή } ΛΛΣ \text{ ή } ΣΛΛ) = \frac{3}{8}$

$P(Y=1) = P(ΣΣΛ \text{ ή } ΣΛΣ \text{ ή } ΛΣΣ) = \frac{3}{8}$

$P(Y=3) = P(ΣΣΣ) = \frac{1}{8}$



$P(\text{κέρδος 1 μονάδα}) = P(Y=1) = P\begin{pmatrix} ΣΣΛ \text{ ή} \\ ΣΛΣ \text{ ή} \\ ΛΣΣ \end{pmatrix} = \frac{3}{8}$

• Ορισμός: Έστω χπ $(S, \mathcal{A}, P)$. Μια συνάρτηση $X: S \to \mathbb{R}$ λέγεται τυχαία μεταβλητή (τ.μ) αν για κάθε (Borel) υποσύνολο $B \subseteq \mathbb{R}$ ή $X^{-1}(B) = \{s \in S : X(s) \in B\} \in \mathcal{A}$

Άσκηση 2 (φυλλάδιο)

α)

5K	
10A	10M

$P(\text{κίτρινες}) = \frac{5}{15}$

β)

$$P(B) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{21}{10}}{\binom{26}{13}}$$

γ)

$$P(3^{η} \text{ μπάλα άσπρη}) = \frac{\binom{6}{3\;3}}{\binom{7}{3\;4}}$$